# 如何学好数学在考研数学中取得高分，实现进入名校的梦想

浙江大学数学科学学院苏德矿

- 硕士研究生入学数学考试历年是考生们感到很棘手的问题，很多考生由于数学没考好而痛失深造的机会。考研的数学内容包括三个部分：微积分、线性代数、概率论与数理统计；同时还分为四个类别，即：数一、数二、数三，数农，

- 报考不同的专业要求考核不同的类别，这四种类别虽然考查的难度和侧重点不同，但作为数学学科特点是一样的，复习的方法也大体相同，而且数学相对于英语来说，只要方法得当，提高就非常快。

- 所以只要掌握了正确的复习方法，就能事半功倍。下面就谈一下如何搞好考研数学复习。
- 考生应了解考研数学的命题原则、知道考题题型及试题难度

- 近几年，教育部考试中心命题基本倾向是：根据学生的实际水平命题，特别是从2000年开始，全国各个高校开始大规模扩招，学生的整体水平有所下降，所以试题的难度在这几年均有所降低。

- 硕士研究生入学考试的数学试题以考察数学基本概念、基本方法和基本原理为主，并在这个基础上加强对考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象力和综合所学知识解决实际问题能力的考察。

# 一、具体遵循下列四原则：

- **1.**科学性与公平性原则
- 作为公共基础课，考研数学试题以基础性、生活类试题为主，尽量避免对于广大考生来说过于专业和抽象难懂的内容。

- **2.覆盖全面的原则**
- 考研数学试题的内容要求涵盖所有考纲要求考核的内容，尤其涵盖数(一)、数(二)、数(三)、相区别之处。

- **3.控制难易度的原则**
- 考研数学试题要求以中等偏上的题为主，考试及格率控制在**30%-40%**。

- **4.控制题量的原则：**
- 在全国硕士研究生入学统一考试中，考研数学按科目分为：数一、数二、数三、数农。每类考试的试卷都是23道题，总共150分。其中，选择题8道，每题4分，共32分;填空题6道，每题4分，共24分，共24分;解答题9道，共94分。保证考生基本能答完试题并有时间检查。
- 硕士研究生入学考试的数学试题从知识内容来说有覆盖面较大的特点。

## 二、从题型与难度来说有以下特点：

- **1.填空题(现在一份试卷中有6个填空题、共占24分)**
- **填空题实际上相当于一些简单的计算题，用于考察“三基”及数学性质，主要是为扩大试卷的覆盖面而设计的，一般以中等偏下难度的试题为主。**

- **2.选择题(现在一份试卷中有8个选择题、共占32分)**
- 选择题大致可分为三类：计算性的，概念性的与推理性的。主要是考查考生对数学概念、数学性质的理解，并能进行简单的推理、判定和比较。

- 3.证明题
- 以数学一为例，整张试卷中，一般有两道证明题：高等数学与线性代数各一题。高等数学证明题的范围大致有：极限存在性、不等式，零点的存在性、定积分的不等式、级数敛、散性的论证。

- 线性代数有矩阵可逆与否的讨论、向量组线性无关与相关的论证、线性方程组无解、唯一解、无穷多解的论证，矩阵可否对角化的论证，矩阵正定的论证，关于秩的大小并用它来论证有关问题等等，可以说线代的证明题的范围比较广。

- 至于概率统计证明题通常集中于随机变量的不相关和独立性，估计的无偏性等。此类题难度一般中等偏上，无过难的题。

- **4.计算与综合题**
- 一份试卷中，包括填空题在内计算题或计算性质的题占**80%**以上。计算题中有一部分是综合题。综合题考查的是知识之间的有机结合，此类题难度一般为中等难度。

- **5.**应用题
- 每一试卷中都有一道应用题，主要考查学生的建模能力，而不是考查专业知识面(如微分方程部分不会考到涉及流体力学、电力学知识的应用题)。不会出现对某一群体明显有利或明显不利背景的题。应用题大致有几何、物理(一般限于力学和运动学)、变化率，等方面的问题，数三应用题常涉及经济方面。

# 三、复习过程中注意事项

- **1.**充分重视考试大纲，逐条分析，潜心研究
- 考试大纲就是国家教育部所划定的复习范围，在考试大纲的要求中，对内容有理解、了解二个层次的要求；对方法有掌握、会(能)两个层次的要求。一般来说，要求理解的内容、要求掌握的方法是考试重点。

- 考试大纲就是国家教育部所划定的复习范围，在考试大纲的要求中，对内容有理解、了解二个层次的要求；对方法有掌握、会(能)两个层次的要求。一般来说，要求理解的内容、要求掌握的方法是考试重点。在历年考试中，这方面考题出现的概率较大；在同一份试卷中，这方面试题所占分数也较多些。

- 我们讲的突出重点，不仅要在主要内容和方法上多下功夫，更重要的是去寻找重点内容与次要内容间的联系，以主带次，用重点内容提挈整个内容。主要内容理解透了，主要的方法掌握了，其它的内容和方法便迎刃而解。即抓住主要内容不是放弃次要内容而孤立主要内容，而是从分析各内容的联系，从比较中自然地突出主要内容。

- 比如微分中值定理，有罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理及泰勒中值公式。由于罗尔定理是拉格朗日定理的特殊情况，而柯西定理和泰勒公式又是拉格朗日定理的推广。比较这些关系，自然得到拉格朗日定理是核心，把这个定理搞深搞透，并从联系中掌握好其它几个定理。

- 而在考试大纲中，罗尔定理与拉格朗日定理都是要求理解的内容，都是考试的重点，我们更突出拉氏定理，可谓是精益求精。对于一些方法与技巧也是这样，比如无穷小分析的方法，在解决微积分问题中就是一种基本的、重要的方法。

- **2.**制订详尽的复习计划
- 复习计划的制订也很重要。数学复习一般需分四个阶段（后面会讲到）。

- **3.**全面复习，注意突出复习重点，全力突破考点
- 大纲虽是复习的方向，但考试大纲中列出的许多内容或者从没考过，或者几乎没有被考到过。这主要是研究生入学考试除了选拔人才，还要有助于课程教学，所以必须深入剖析大纲要求，提炼出复习重点。

- 在对概念、定理、公式进行全面复习的基础上对重点和难点部分作重点复习，但不要去做偏题、难题、怪题。考生对数学基本概念、基本方法、基本定理要很好掌握。数学不同于其它学科，靠侥幸押题是行不通的，只有打好基础，熟能生巧，才能逐步提高解综合题和应用题的能力。

- 从近几年数学考试试卷中看，普遍存在的问题可归纳为两点：（**1**）考生对数学基本概念、定理理解不准确，数学中最基本的方法掌握不灵活。这些掌握不好，给解题带来思维上的困难。数学的概念和定理是组成数学试题的基本元件，数学思维过程离不开数学概念和定理。因此，要学好数学，取得好成绩，首先必须正确理解和掌握好数学概念、定理和方法。

- （2）考生解综合性试题和应用题能力普遍较差。作为研究生入学考试，不能单纯考查基础知识，而是在考查三基的基础上注意考查考生解综合题和应用题能力。所谓综合题，就是考查多个知识点的试题。一道好的综合题考查内容可以是同一学科的不同章节，也可以是不同学科的。

- 近几年的试卷中典型综合题有：级数与积分综合题；线性代数与空间解析几何知识的综合题；概率论与微积分综合题；微积分与微分方程综合题。实际上，单纯考查现成方法应用和单个概念的数学题是较少的；一般情况下，一道数学题尤其解答题都涉及多个概念的综合，这是数学自身特点决定的。

- 解答综合题要求考生对考试大纲内容要融汇贯通，并能灵活运用。解应用题的一般步骤都是认真理解题意，建立相关的数学模型，如微分方程、函数关系、条件极值等，将其化为某数学问题求解。应用题通常不是难题，但从考试情况看，应用题得分率普遍较低，值的我们深思。

- **4.紧抓住考试重点、热点**
- 通过对历年试题的统计分析可以得出常考的内容，考试的重点，通过对近几年考题的分析可得出考试热点，抓住重点、热点可使复习针对性增强，加快复习进度并节省大量时间，提高考研竞争优势，为考场取得高分打下坚实的基础。

- **5.**基本训练，反复进行。
- 考研就是考“熟练”，只有把内容、方法搞熟练，才能获得最后的成功。学数学只有做大量的高质量的练习题才能把基本功练熟、练透，才能提高应试和解题的能力，总之数学需多做题，不能眼高手低。做题时要完整、认真演算，过一段时间要翻出来再看几遍。

- 6.探索思路、归纳方法，提炼题型
- 尽管考题千变万化，但是题型相对固定，提炼题型的目的就是为了提高解题的针对性，形成思维定势。要取得数学考研的理想成绩，主要在于提高解题能力，除了反复训练基本功外，更重要的是在训练中不断总结题型及解题方法，探索如何着手解题的思路，使知识模块化，解题方法格式化。

- **7.重视巩固历届考题**
- 充分重视历年考题，有助于把握考试重点。历年考题涵盖了各章节的典型题型，通过做历年考题不失为复习数学较好方法之一。此外，研究生入学考试每年举行一次，因此不可能每年的考题都是全新的，或者每道题都有新“花招”。事实表明最新的考题与往年考题非常雷同的占**50%**以上。

- 这些考题或者改变某一数字，或改变一种说法，但解题的思路和所用到的知识点几乎一样。所以希望考生一是注意年年被考到的内容，对往年考题要全部消化巩固；二是注意那些多年没考到而大纲要求的内容。

- 有些考生考后抱怨题太多，做不完或做错。其原因就是平时缺少练笔的机会以及考前没有进行强化训练。建议考生在限定三个小时内系统做几套模拟题或样题，然后对照答案自己分析总结。

- 归纳出每部分的主要题型和考点，对于那些具有很强的典型性、灵活性、启发性和综合性的题要特别注重解题思路和技巧的培养。尽管试题千变万化，其知识结构基本相同，题型相对固定。提炼题型的目的，是为了提高解题的针对性，形成思维定势，进而提高考生解题的速度和准确性。

- **8.做模拟试题**
- 在认真复习完教材和复习完数学指导书后，应多做模拟题。在规定的时间内做几套模拟试卷，一是可以了解一下自己对所考的知识点究竟掌握到什么程度，同时可以了解到自己的薄弱环节从而抓紧时间补上。

- 再者通过平时的“练兵”可以给应试时提供点临场发挥的经验。有相当一部分考生的经验证明：如果考生能够通过做题将所遇到的各种题进行延伸或将试题的变式做到融汇贯通，一定会在考试中运用自如超常发挥，取得好成绩。

# 四、如何进行数学的四轮复习

- 第一轮，一般是暑假之前。考生应抓紧复习本科时用过的课本，把基本定义、概念、公式与定理整理一下，把已经遗忘的都捡回来，把问题归纳一下，一定要做书上部分的习题，用以熟悉方法、训练计算能力。

- 考研虽然以考三基为主，但又不能局限于此，还要考察分析综合能力，考题中的综合题既可能是跨章节也可能是跨学科的。因此只读课本又显不够，应当选一本考研复习资料，帮助你把零散的知识串联起来，使知识融会贯通。

- 第二轮，一般是暑期中。考生应当参加一个考研辅导班，自学与辅导相结合效果能有所提高，像考卷中的种种错误，在辅导班中是能得到提醒与纠正的，在概念的理解、方法的运用、综合分析能力等方面也会得到提高与加强。因为辅导班中学习强度很大，为保证听课效果，暑期前复习课本是非常必要的。如果有的同学没有按照一、二轮要求去做，现在应抓紧补回这一课。

- 第三轮，秋季应在复习整理、熟练上下功夫，冬季可作一些模拟题，既可体验考场气氛又可查漏补缺，再提高一步。做模拟题时，应限三个小时做完一套题，不会时不要急于查书和看答案，在提高分析能力上动脑，若发现计算上失误不应自亮绿灯，只有平时严格，不断积累、总结，才会有收益。

- 第四轮，考试阶段
- 11月底，调整作息时间和心态，准备考试。最后阶段是考前冲刺。针对在做模拟试题过程中出现的问题作最后的补习，查缺补漏，以便以最佳的状态参加考试。冲刺，该背的也该抓紧背了。最后一点是考场发挥问题。数学考试要保持清醒、镇静、有信心。考时做题前，根据考生情况，最好是把题目先看一遍，按顺序往下做，万一遇到一个题被“卡”住了，不要硬做下去，先放弃这个题。应当看到，难题对大家都一样。

- 先做自己最有把握的题，拿到试题，要耐心审题，要一眼就看得出，本题主要考什么知识点，用什么方法，然后整理出你的解题思路与步骤，再一步步地做下去，方能做到凡会做的题一定不错。考生保持考场上的镇定、头脑的清醒、注意力的集中，是临场发挥出自己水平的重要策略。

- 总之，对于考生来说，要想在研究生数学考试中取得好的成绩，
- 必须认真系统地按照各类考试大纲的要求全面复习，掌握数学的基本概念、基本方法和基本定理，不断地培养和提高逻辑推理能力、运算能力、空间想象能力以及运用数学知识解决实际问题的能力。数学不同于其他学科，只有打好了坚实的基础，才能取得好的成绩。

# 五、八点珍贵建议

- 考研考的不是你的聪明，而是你的毅力、勤奋和持之以恒！因为不聪明，所以复习就更加慎重：
- **1.**不买很多的参考书
- 每门都选择那些质量高而且符合自己口味的书籍来看。

- 2.不去跟人家攀比，特别不要跟人家比看书看的几遍几遍等
- 很无聊的事情，内容掌握的程度和你看的遍数没有直接的比例关系。但是，当你复习的很吃力的时候，就到了你该向人请教和谈论各自进度的时候了，这样可以避免你闭门造车，偏离航线。根据和同学的交流你可以及时的更正。但是，千万不能被别人牵着鼻子走，应该有自己的步骤和规划。注意，越是到后期这种定力是越为重要的。

- 3.把目光放得长远一点
- 不要仅仅看到你们学校的水平，要考虑到全国学生的水平。要打听好，考上你想上的学校比较保险的分数是多少。然后根据自己的能力给自己各科打分，你就会发现你应该在哪里努力，哪里有较大的改进可能，然后不断的向自己的目标迈进就行了。不断的超越自己是击败对手的最好武器！！

- 4.利用好时间
- 时间是金子！越到后面你会越恨时间少。十一国庆节左右，你就会发现你的起床时间会越来越早，睡觉时间是越来越少了。所以有效利用时间是非常关键的。要把每一分时间都抓住，都利用好。

- 5.制定计划
- 没有计划，你很容易被外界干扰，自己也很容易麻痹自己，形成拖沓的习惯，白白浪费宝贵的时间。计划要分成大计划和小计划。大的计划就是长远目标---你要达到什么样的水平，补充那些空白，增强那方面能力等；小的计划就是短期安排----你要看完那些书，以及每周每天的生活时间安排比如起床、早读、上课、午休、复习、睡觉、锻炼时间等等。

- 6.懂得舍弃
- 对于生活中的一些事情，我们应该能够分清轻重缓急。有时候什么都想抓可能到头来什么都抓不到！如果你决定考研，而且下定决心一定非成功不可，那么你就应该让生活和学习中的一切事情为考研让路。因为现在对你而言，考研是最为重要的！！！

- **7.调整好心态**
- 心态对于考研的重要性是不能不重视的。其实前面几条如果你能够做到就已经为你调整好心态做了充分的准备。不要让生活中的琐事影响你的心情和正常的学习时间。要和同学、室友、老师、朋友处好关系，要使自己生活在一个风平浪静的氛围里。

- 偶尔厌学，不要紧，干脆我一天都不学，出去玩个痛快，晚上洗个热水澡，静下心来，分析这一段时间完成的任务和表现的如何，然后思考下一个阶段自己应该怎么做并拟订计划，然后睡个好觉，第二天重新投入。

- **8.相信自己**
- 信心是你前进的力量。你要知道只要你踏踏实实的走完考研这段历程，胜利肯定会属于你。人多没有关系，因为有竞争能力的不多，能够坚持走完这条路的就更不多了，所以只要你坚定的走下来，你成功的机会就已经不低了，再加上你的辛勤的汗水，成功自然是水到渠成，指日可待了！！

# 六、十大禁忌

- 禁忌十:准备不足
- 大多数考生考完后的感觉是:题目不难也不是很偏，只是自己时间太少了，自己的复习准备不足。
- 凡是预则立，不预则废。常胜将军不打无预备之仗。虽然有的人在很早之前就声称考研了，可那也是雷声大，雨点小，没有什么实际行动。到了关键阶段好不容易有了行动，但由于不是很投入，也没有什么效果。等到幡然悔悟时，离考试也就没多少时间了！

- 更有的不到火烧眉毛不着急，待到着急时，后悔都来不及了！所以每年号称有数十万人报名考研，但真正坐到考场上时就少了一小半，等到真正坚持考完而且有信心者，寥寥无几，而这些人基本上就没什么问题了。
准备不在于早，而在于是否真正用心准备，是否真正全身心地投入。

- 一般情况下在大三暑假即七月份开始着手准备，此时距考试还有半年，时间足够了。甚至在9月份也来得及。但千万记住:一旦开始动手准备，就要全身心的投入，至少要保证每天有8~10小时的复习时间，否则，到时候你也会后悔的！

- 禁忌九:没有计划
- 考试准备不足的最大的原因是没有一个合理的复习计划。这样将造成很多的考生不能很好地利用时间，一部分知识点不能充分地理解和掌握。

- **Bad planning will lead to difficulty later**。制定合理有效的学习计划是考研成功的保证。把考研时间划分成不同阶段，针对各阶段的特点有所侧重地安排任务，根据整体复习与阶段复习、单科复习相配套的原则，结合自己的实际情况，制定出全面兼顾，有的放矢的计划。

- 虽然计划赶不上变化，但制定了计划就要最大限度的发挥作用，就要在必要的灵活变通的情况下坚决执行，不要很随意的一变再变。

- 有了计划可以保长补短，可以避免外界的干扰，可以提高自己的自信心。如果我们订的计划能够得到完全执行，相信考研只是小事一桩。因为通过计划我们可以更合理地学到考试要点，不会有去找工作或者报考公务员之类想法，不会盲目地和其他同学攀比。循序渐进，肯定能高效率的达到目标。

- 禁忌八:贪得无厌
- 考研后，我们发现有不少的资料只看了一点点或者根本没看，有一部分资料我们看了一半，还有一些资料确实对有用，我们看了**N遍!**
- 考研时的复习资料很多，而且值得参考的也很多，不过，没有一个人可能把所有的资料都看完，更何况也没有必要，因此我们就要有选择的来看。

- 买过多的参考书，不但浪费钱，而且还会给自己造成心理负担，如果书的质量不高的话，做了浪费时间而且影响做题思路，绝对百害而无一利。
- 一般说来，前期每科固定一两本书就可以了，不能贪多，俗话说的好“贪多嚼不烂”，还浪费“粮食”！后期各科选择一本习题集加上真题来做就OK了。

- 禁忌七:过分依赖
- 经历了这次考研，真切地体会到人与人是不同的。没有一个人的经验可以完全适用于另外一个人。
- 过分依赖包括两种情况，一是迷信于别人所谓的经验。用哲学的观点来说就是知和行的关系。别人的经验只可以用来借鉴而不可以生搬硬套。

- 每个人的情况都是不一样的，我们应该实事求是，找出适合自己的学习方法来。不可否认，通过上些辅导班对成绩的提高有所帮助。

- 复习最主要的还是要靠自己静下心来慢慢地理解。不要太迷信前人，也不要太在意周围的人怎么着怎么着。很重要的一点是问问自己究竟是属于哪一种学习类型的人，再根据自己的情况制定计划书，千万不可以盲目跟从别人的经验和进度，那样不但扰乱了自己正常的学习计划，也会影响了别人的情绪。

- 禁忌六:法不得当
- 在考研中除了勤奋用功、坚持不懈以外，复习方法也非常重要。如果考研中法不得当，就会不得要领，甚至本末倒置，做出舍本逐末的事情来。
- 复习时就要抓住考试这个根本，从分析考试大纲和真题入手，确定复习重点，将重要的知识点和题型搞透，不要妄图面面俱到，否则你的时间肯定不够。

- 还要注意把握记忆规律，平时不会做或做错的题要特别注意，最好隔段时间就要重做一遍，直到它真的成为你自己的东西，否则考试时你就会觉得许多题都似曾相识，却就是做不出。

- 复习要注意几点:方法技巧是很重要的，但要重在理解；不提倡题海战术，但做题要有一定的量，不要只看例题，不动笔练习，还要学会与人交流，学会归纳总结，适当记忆；还有要重基础，明主次，把握好什么是重要的，什么是次要的，不要舍本逐末，花时间做无用功；还有就是要做到持之以恒，坚持到考试结束。

- 禁忌五:消息闭塞
- 错过一些必要的信息，是导致考研失败的一大原因。
- 现在的考研实际上是一个信息战争，得到一些确切的相关情报不仅可以节省你的时间和精力，而且还会出其不意地得到一个理想的结果。有的人喜欢一人埋头苦干，以为工夫下到了，自然水到渠成。但考研还讲究效率，还讲究针对性。

- 公共课的命题趋势、重点，专业课历年的题目，没有换老师命题（专业课一般换老师命题就会大变）等等信息，将很大程度地影响考研结果。
考研期间要多和考研的战友交流，特别是那些上辅导班的，这样可以获得一些大家都心知肚明的信息；通过多种途径与考过该专业的学长请教一下考研经验，吸取一些教训，问问注意事项，甚至可以获得一些“内幕消息”；

- 了解一下专业课老师的喜好，有可能就上上他讲的课，再分析一下历年真题，一般都可以得出点什么结论来；还有就是利用网络，像万学海文考研网、中国考研网、考研加油站等网站都可以提供一些相当适用的信息。但劝诫一下，每天上网时间不可超过三个小时，因网络容易让人沉溺，信息庞杂，要有目的地搜寻相关信息，不要干无关的事情。

- 禁忌四:没有良伴
- 谁与我度过漫长的这么多天是一个大问题。
- 考研需要花费很长的时间，中间还要承受很大的压力，其中有时你也会很烦躁，希望有人在身边和自己一起努力，提醒自己曾经定下的目标和当初的梦想;

- 在遇到困难时有人与你并肩作战，可以排除孤独感，增加必胜的信心；同时在比较中前进，可能会有更好的效果。
- 虽说考研最好结伴，但要睁大双眼选择。意志不坚定的不要选，你不仅要帮他增强信心上，而且说不定你的意志也会被他给催垮了；

- 边考研边找工作的人不要选，这种人不会全心投入考研，最后很有可能结伴去找工作了；别做考研中的电灯泡，一来妨碍了别人，二来让你倍感凄凉与冷落，影响复习的心情；慎重对待男女同考，这是一件很危险的事情，试想两个人亲亲密密一边嗑瓜子一边看辅导书，效率到底会怎样呢？

- 禁忌三:信心不足
- 可以这么说，考研那么多人，有信心的能有几个？这也许就是整体成绩不高，每年有大面积的人落榜的真正原因吧！
- 不是因为做不到而没有信心,而是因为没有信心所以才做不到。其实考研并不难，难的是如何相信自己有成功的绝对实力。

- 这是好多同学的通病，还没有考试心已胆怯，那样失败只是早晚的事情。他们可能在大学四年的成绩一般，甚至可能在一所不入流的学校，而考研的千军万马中不乏那些来自名校成绩骄人的学子，再加上地域、主场优势，可能未战已失去了一些信心。这是要不得的！

- 事实上，平时成绩好坏与能否考上研没有太大的关系，好多成绩不好的学生，他们甚至有个别课程没有及格，英语没过四级，但这并不影响他们考上重点院校；考研比考大学要相对容易的多，好多没能考上清华、北大的在考研时实现了他们四年前的梦想。大家都是从高考的独木桥上走过来的，为何在考研时不相信自己呢？

- 禁忌二:意气用事
- 考研之所以失败，是因为没有把考研真正的放在心上，是因为我们太意气用事了！不是发自内心的考研动机，成功的几率不会太大。意气用事到底害了谁?

- 有的人只是为了一个名校梦，不切实际只能注定失败；有的人把考研当成一种与他人抗衡的工具或途径，这样考研就失去了它本身的意义；有的人觉得无所谓，可考可不考，只是觉得这段时间很无聊，甚至把考研当成了水平测验。实际上这牵涉到了为什么考研的问题。我知道，好多人考研只是为了感情、工作等造成的压力，内心并没有太大的动力，意气用事往往造成主次不分，这样的考研即使成功了又有什么意义呢？

- 始终要坚持考研第一，把考研当成自己目前的事业来做。态度决定一切，一定要端正考研态度，给自己一个明确的定位，知道自己在做什么该做什么并且知道自己要该怎样去做；要勇敢地面对考研中遇到的困难和障碍，克服犹豫不决、精力分散、躲避面对、信心不足等消极影响，集中精力积极面对，只要能够在较长时间里保持注意力，并且坚持学习到最后，我想没有什么我们达不到的目的。

- 禁忌一:三心二意
- 考研成功的理由有成百上千个，但考研失败的原因却只有一个，那就是考研最大之忌:三心二意。
- 考研最主要的还是一个心态的问题:三心二意、心猿意马、心浮气噪。不管是已经毕业的还是在校的学生，这一点都是考研大忌。

- 在考与不考之间徘徊，把考研当成一个平衡的手段，老觉得考不上还可以工作，实际上这种心理对考研的影响是很大的。考研是一件艰辛的事，耐不住寂寞的人和心浮气噪的人考研，往往不能把心事放在复习上，别看他整天在教室呆着，但效果究竟如何呢？在考研教室里趴着桌子睡觉是司空见惯的事情。

- 还有考研的大都是二十好几的人了，特别是还没有找另一半的，既眼红于眼前的卿卿你我，又要应付老爸唠叨，有时倍感凄凉，即使考研期间也不例外。感情在考研期间也倍受煎熬，有时也会受到意想不到的致命打击。但我想既然选择了这一切，目前的局势还无法改变，唯一能做的就是好好备考。

- 有一些考研的复习时老爱灵魂出窍，三天打鱼，两天晒网，认真不了三天就想轻松轻松，可能是平时散漫惯了。考研考的是人的毅力，要坚持，虽不可能是天天如一日，但也不能只有三天的热情吧！要有足够的勇气去大胆的选择，要有足够的精力去应付。这是很重要的。

- 考研需要耐力，信心，忍受寂寞，学会放松。既然选择了考研就要专心考，不要朝三暮四，花其它的心思，知道做到这一点，非常困难，却很重要。考研就是两个字“坚持”。

- 0 考研考研考研，一切为考研准备
- 1 按时吃饭睡觉，尽量起床吃早饭
- 2 珍惜一分一秒，减少电脑前时间
- 3 适当保持沉默，收敛动作和表情
- 4 每周运动两次，有健康才有将来

- 5 凡事准备充分，坚持每天有所得
- 6 勇敢的做自己，尽量少用笑敷衍
- 7 该做的事先做，绝不拖沓到最后
- 8 坏毛病死命改，不准放任无所谓
- 9 像个男人样子，塌实向前不放弃

# 七、考研的几点教训

- （一）、目标不坚定。这很大程度影响了复习进程、复试自信心。在制定目标时，也不要把目标定的太高，不要把自己期望的太高，太难达到容易绝望。考研很重要的一点就是要看到希望，要有坚强毅力去坚持！

- （二）、复习上没有注意策略，复习常常是匆忙且狼狈地被动应付，最惨的就是复习过程断断续续，像英语这科都是要细水长流的。在初试和复试的不少信息上我也知道的有点迟(这也许就是跨校跨专业考试的难处吧)。还有有时复习会沉迷于知识点细节中，没整体感。

- （三），时间安排上有重大问题：**1**、复习开始的太晚了。**2**、没有提前安排好时间分配，复习中间断断续续，而这是考研复习大忌。**3**、没有充分考虑中间的其它影响因素。因此在制定考研计划时不要把时间预算得过于理想)

- 八、**2016**年《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》正式亮相，新大纲没有任何的变化，说明考研数学继续往年的命题规律。

# 九、考研应试技 巧

- 数学是令大多数考研者头疼的科目，答题是关键。我们总结一些应试技巧，以期帮助大家提高做题的速度和质量。

- 提前进入“角色”
- 考前一个晚上睡足八个小时，早晨吃好清淡早餐，按清单带齐一切用具，提前半小时到达考区。一方面可以消除紧张、稳定情绪、从容进场，另一方面也留有时间提前进入“角色”——让大脑开始简单的数学活动，进入单一的数学情境。如：

- **1.**清点一下用具是否带齐(笔、橡皮、作图工具、身份证、准考证等)。
- **2.**把一些基本数据、常用公式、重要定理在脑子里“过过电影”。
- **3.**最后看一眼难记易忘的知识点。
- **4.**互问互答一些不太复杂的问题。

- 精神要放松，情绪要自控
- 最易导致紧张、焦虑和恐惧心理的是入场后与答卷前的“临战”阶段，此时保持心态平衡的方法有三种：①转移注意法②自我安慰法③抑制思维法

- 迅速摸透“题情”
- 刚拿到试卷，一般心情比较紧张，不忙匆匆作答，可先从头到尾、正面反面通览全卷，尽量从卷面上获取最多的信息，为实施正确的解题策略作全面调查，一般可在十分钟之内做完三件事：

- 1.顺利解答那些一眼看得出结论的简单选择或填空题(一旦解出，情绪立即会稳定)。
- 2.对不能立即作答的题目，可一面通览，一面粗略分为A、B两类：A类指题型比较熟悉、估计上手比较容易的题目，B类是题型比较陌生、自我感觉比较困难的题目。

- **3.**做到三个心中有数：对全卷一共有几道大小题有数，防止漏做题，对每道题各占几分心中有数，大致区分一下哪些属于代数题，哪些属于高数题，哪些属于概率题。
- 通览全卷是避免“前面难题做不出，后面易题没时间做”的有效措施，也从根本上防止了“漏做题”

- 信心要充足，暗示靠自己
- 答卷中，见到简单题，要细心，莫忘乎所以，谨防“大意失荆州”。面对偏难的题，要耐心，不能急。考试全程都要确定“人家会的我也会，人家不会的我也会”的必胜信念，使自己始终处于最佳竞技状态。

- 以快为上
- 研究生考试数学试卷共有23个题，考试时间为180分钟，平均每题约为7.8分钟。为了给解答题的中高档题留下较充裕的时间，每道选择题、填空题应在一至二分钟之内解决。若这些题目用时太长，即使做对了也是“潜在丢分”，或“隐含失分”。一般，客观性试题与主观性试题的时间分配为4：6。

- 立足中下题目，力争高水平
- 因为时间和个别题目的难度都不允许多数学生去做完、做对全部题目，只有个别的同学能交满分卷，所以在答卷中要立足中下题目。中下题目是试题的主要构成，是考生得分的主要来源。学生能拿下这些题目，实际上就是数学科打了个胜仗，有了胜利在握的心理，对攻克高档题会更放得开。

- 立足一次成功，重视复查环节，不争交头卷
- 答卷中要做到稳扎稳打，字字有据，步步准确，尽量一次成功，提高成功率。试题做完后要认真做好解后检查，看是否有空题，答卷是否准确，所写字母与题中图形上的是否一致，格式是否规范，尤其是要审查字母、符号是否抄错。

- 最后，再次检查一下姓名与考证号是否写正确。确信万无一失后方可交卷，宁可坚持到终考一分钟，也不要做交卷第一人。
- 选择题的答题技巧。

- 选择题一共8道，都是单选题，主要分为三种类型：计算型、概念型、理论型。计算型选择题主要考查的是考生对基本方法的掌握程度和运算能力。概念型选择题主要考查同学们对基本概念的理解及对概念的运用。

- 理论型选择题主要考查考生对基本性质、定理、方法的条件及结论的掌握，同时考查分析、比较、判断和推理的能力。在这三种类型中，以概念型和理论型的选择题为主，而计算型的题目在选择题中出现的较少，计算能力的考查主要集中在填空题和解答题。

- 在历届的考生中，选择题丢分很严重，这个地方丢分的原因主要是三个方面：第一，同学们学数学，一个薄弱环节就是基本概念和基本理论，内容都很熟悉，但不知道如何运用;第二，虽然考研数学重基础，但不是说8道选择题都是很基本的题目，也有些题是有一定难度的;第三，考生缺乏对选择题解答的方法和技巧，往往用最常规的方法去做，不但计算量大，浪费时间，还很容易出错，有时甚至得不出结论。

- 要想解决以上问题，首先，对我们的薄弱环节必须下功夫，实际上选择题里边考的知识点往往就是我们原来的定义或者性质，或者一个定理的外延，所以我们复习定理或性质的时候，既要注意它的内涵又要注意相应的外延。比如说原来的条件变一下，这个题还对不对，平时复习的时候就有意识注意这些问题，这样以后考到这些的时候，你已经事先对这个问题做了准备，考试就很容易了。

- 其次，虽说有些题本身有难度，但是数量并不多，一般来说每年的8道选择题中有一两道是比较难的，剩下的相对都是比较容易的。最后，就是掌握选择题的答题技巧，这一点非常重要，万学教育海文考研的老师给大家总结了以下方法。
-

- 直推法： 推法是由条件出发，运用相关知识，直接分析、推导或计算出结果，从而作出正确的判断和选择。计算型选择题一般用这种方法，这是最基本、最常用、最重要的方法。

**(10 年数一，4 分)**极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$ (　　)

(A) 1.　　(B) $e$.　　(C) $e^{a-b}$.　　(D) $e^{b-a}$.

**【考查分析】本题考查“$1^\infty$”型极限的计算.**

**【详解】**

**解** 本题极限为$1^\infty$型,故可以用“$e$抬起法”.

$$I=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}},$$

其中又因为

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\cdot\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]=\lim_{x\to\infty}\left\{x\cdot\ln\left[1+\frac{x^2-(x-a)(x+b)}{(x-a)(x+b)}\right]\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left[x^2-(x-a)(x+b)\right]}{(x-a)(x+b)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b)x^2+abx}{x^2+(b-a)x-ab}$$

当$a\neq b$时，$I=e^{a-b}$；

当$a=b$时，$I=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{abx}{x^2-ab}}=e^0=e^{a-b}$，

综上所述，所以选(C).

- 赋值法：是指用满足条件的“特殊值”，包括数值、矩阵、函数以及几何图形，通过推导演算，得出正确选项。在解数学题时，人们运用逻辑推理方法，一步一步地寻求必要条件，最后求得结论，是一种常用的方法。

- 对于有些问题，若能根据其具体情况，合理地、巧妙地对某些元素赋值，特别是赋予确定的特殊值（如），往往能使问题获得简捷有效的解决。但是这仅仅只能得到该赋予的值的情况，所以做题时可以继续根据已得到的情况推断并证明。这就是赋值法。
-

**(11年数一,4分)** (1) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是(　　)

(A) $(1,0)$.　　(B) $(2,0)$.　　(C) $(3,0)$.　　(D) $(4,0)$.

**【考查分析】本题考查判断拐点的充分条件.**

**方法 1:** 记 $g(x)=(x-1)(x-2)^2(x-4)^4$，则 $y=g(x)(x-3)^3$，

$$y'=g'(x)(x-3)^3+3g(x)(x-3)^2,$$

$$y''=g''(x)(x-3)^3+6g'(x)(x-3)^2+6g(x)(x-3),$$

$$y'''=g'''(x)(x-3)+9g''(x)(x-3)^2+18g'(x)(x-3)+6g(x)$$

则 $y''(3)=0$，$y'''(3)=6g(3)\neq 0$，所以，$(3,0)$是拐点. 所以选项(C)正确.

**方法 2:** 记 $y_1=x-1, y_1'=1, y_1''=0$，$y_2=(x-2)^2, y_2'=2(x-2), y_2''=2,$

$$y_3=(x-3)^3, y_3'=3(x-3)^2, y_3''=6(x-3),$$

$$y_4=(x-4)^4, y_4'=4(x-4)^3, y_4''=12(x-4)^2,$$

$y''=(x-3)P(x)$，其中 $P(3)\neq 0$，$y''\big|_{x=3}=0$，在 $x=3$ 两侧，二阶导数符号变化，所以选项(C)正确.

- 排除法：通过举例子或根据性质定理，排除三个，第四个就是正确答案。这种方法适用于题干中给出的函数是抽象函数，抽象的对立面是具体，所以用具体的例子排除三项得出正确答案，这与上面介绍的赋值法有类似之处。

(2) **(03 年数一,4 分)**设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$,则必有(　　)

(A) $a_n<b_n$对任意$n$成立.　　(B) $b_n<c_n$对任意$n$成立.

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_nc_n$不存在.　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty} b_nc_n$不存在.

**【考查分析】本题考查极限的不等式性质、极限的运算法则.**

**【详解】**

**方法 1**:推理法.

数列极限与前面有限项无关,故排除(A)(B),而$\lim\limits_{n\to\infty} a_nc_n$属于“$0\cdot\infty$”型未定式,极限可能存在,也可能不存在,故排除(C).

由题设$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$,假设$\lim\limits_{n\to\infty} b_nc_n$存在并记为$A$,则

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_nc_n}{b_n}=A,$$

这与$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$矛盾,故假设不成立,即$\lim\limits_{n\to\infty} b_nc_n$不存在.所以选项(D)正确.

**方法 2**:排除法.

取$a_n=\dfrac{1}{n},b_n=\dfrac{n-1}{n}$,满足$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$,而$a_1=1,b_1=0,a_1>b_1$,则(A)不正确;

取$b_n=\dfrac{n-1}{n},c_n=n-2$,满足$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$,而$b_1=0>-1=c_1$,则(B)不正确;

取$a_n=\dfrac{1}{n},c_n=n-2$,满足$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$,而$\lim\limits_{n\to\infty} a_nc_n=1$,则(C)不正确.

所以选项(D)正确.

- 反推法：就是由选择题的各个选项反推条件，与题设条件或已有的性质、定理及结论相矛盾的选项排除，从而得出正确选项。这种方法适用于选项中涉及到某些具体数值的选择题。反推法，通俗来讲，就是在计算性的试题中，根据给出的选项来反推出正确答案。这种方法主要是根据选项延伸而来，一般来说，资料分析的4个选项，有两个是很容易排除掉的，而剩余的两个比较接近，此时就可以采用此种方法。

- 數學問題里由已知条件出发，根据定义，公理及已有定理步步推演，直到获得我们所要的结果，这种思考途径便是顺推法。反之，执果寻因，从我们所要的结果**A1**出发，寻找获得**A1**的充分条件**...**。这种的思考途径就叫倒推法。

(10年,4分) (3) 设函数 $f(x),g(x)$ 具有二阶导数,且 $g''(x)<0$,若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值,

则 $f(g(x))$ 在 $x_0$ 取极大值的一个充分条件是( )

(A) $f'(a)<0$. (B) $f'(a)>0$. (C) $f''(a)<0$. (D) $f''(a)>0$.

**【考查分析】本题考查抽象复合函数的二阶导数和极值判断的充分条件.**

**【详解】**

$$\{f[g(x)]\}'=f'[g(x)]\cdot g'(x),$$

$$\{f[g(x)]\}''=\{f'[g(x)]\cdot g'(x)\}'=f''[g(x)]\cdot[g'(x)]^2+f'[g(x)]\cdot g''(x)$$

由于 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值,所以 $g'(x_0)=0$.所以

$$\{f[g(x_0)]\}'=f'[g(x_0)]\cdot g'(x_0)=0.$$

$$\{f[g(x_0)]\}''=f'[g(x_0)]\cdot g''(x_0)=f'(a)\cdot g''(x_0)$$

由于 $g''(x_0)<0$,要使 $\{f[g(x_0)]\}''<0$,必须有 $f'(a)>0$,故选(B).

- 图示法：若题干给出的函数具有某种特性，例如：周期性、奇偶性、对称性、凹凸性、单调性等，可考虑用该方法，画出几何图形，然后借助几何图形的直观性得出正确选项。此外，概率中两个事件的问题也可用图示法，即文氏图。
- 考生在做题的时候，各种方法要灵活运用，这就需要大家在平时复习中多总结、多练习

(3) **(04 年数三,4 分)**设 $f(x)=|x(1-x)|$，则（　）

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.



(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

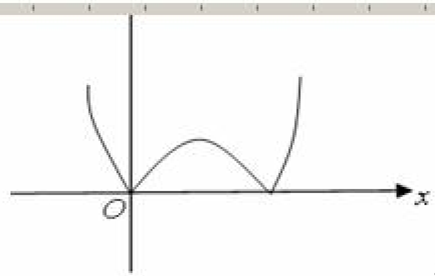
(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

**【考查分析】本题考查函数的极值点与曲线的拐点的判定.**

**【详解】**

**方法 1:**由于是选择题,可以用图形法解决,令 $\varphi(x)=x(x-1)$,则 $\varphi(x)=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$,是以 $x=\frac{1}{2}$ 为对称轴,顶点坐标为 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$,开口向上的一条抛物线,与 $x$ 轴相交的两点坐标为 $(0,0)$，$(1,0)$，$y=f(x)=|\varphi(x)|$ 的图形如下.




点 $x=0$ 是极小值点;又在点 $(0,0)$ 左侧邻近曲线是凹的,右侧邻近曲线是凸的,所以点 $(0,0)$ 是拐点,选(C).

**方法 2:**写出 $y=f(x)$ 的分段表达式: $f(x)=\begin{cases}-x(1-x), & x\le 0,\\ x(1-x), & 0<x<1\end{cases}$ ($x\ge 1$ 处与本题无关,故不写出).

从而
$$f'(x)=\begin{cases}-1+2x, & x<0,\\ 1-2x, & 0<x<1,\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}2, & x<0,\\ -2, & 0<x<1.\end{cases}$$

当 $x<0$ 时, $f'(x)<0$;当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$,所以 $x=0$ 为极小值点.

当 $x<0$ 时, $f''(x)=2>0$ ,所以 $f(x)$ 为凹函数;当 $0<x<1$ 时, $f''(x)=-2<0$ ,所以 $f(x)$ 为凸函数,于是 $(0,0)$ 为拐点.选(C).

# 复习案例

- **无穷小量、无穷大量、阶的比较**蔔
- **一、无穷小量**蔔
- 在函数根限中，有一类极限在微积分的理论中尤为重要。蔔
- **定义  若f(x)＝0则，称f(x)是当x→x0时的无穷小量，其中x0可以是常数，也可以是＋∞、－∞或∞。**蔔

例 1　$x$，$x^3$ 当 $x\to 0$ 时是无穷小量，$\frac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时是无穷小量。

注意：无穷小量不是很小的量，而是极限为 0，用 $\varepsilon-\delta$ 定义叙述为任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $|f(x)|<\varepsilon$。

**定义　若存在 $x_0$ 的某空心领域 $U^0(x_0)$，使 $f(x)$ 在 $U^0(x_0)$ 内有界则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是有界量。**

**这个定义的否定就是无界量定义。**

**定义　对 $x_0$ 无论多么小的空心领域 $U^0(x_0, \delta)$，任给 $M>0$，存在 $x\in U^0(x_0, \delta)$，但 $|f(x)|>M$，称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是无界量。**

**定理**　若 $\lim f(x)=A$，则 $f(x)-A$ 当 $x\to x_0$ 时是无

**定理　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $f(x)-A$ 当 $x\to x_0$ 时是无穷小量或者 $f(x)=A+a(x)$，$a(x)\to 0\quad(x\to x_0)$。**

无穷小量还具有下列性质：

1. 有限多个小无穷小量之和仍是无穷小量。

2. 有限多个无穷小量之积仍是无穷小量，事实上由极限的性质可得。

3. 无穷小量与有界之积仍是无穷小量。

证　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$g(x)$ 当 $x\to x_0$ 是有界量，由定义存在 $x_0$ 的一个空心领域 $U^0(x_0,\delta_1)$，存在常数 $M>0$，

当 $x\in U^0(x_0,\ \delta_1)$ 时，$|g(x)|\leqslant M$。任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_2>0$，当 $x\in U^0(x_0,\ \delta_2)$ 时，$|f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M}$，取 $\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$。

当 $x\in U^0(x_0,\ \delta)$ 时，$|f(x)g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M}M=\varepsilon$。

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$

例 2　$\lim\limits_{x\to x_0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

注意：无限个无穷小量之和不一定是无穷小量

例　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)=1$

无限个无穷小量之积不一定是无穷小量，这个结论读者可能感到不可思议，与我们的感性认识不一致，

## 二、无穷小量阶的比较

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ 那么，我们如何来判断 $f(x)$，$g(x)$ 当 $x\to x_0$ 时趋于 0 速度的快慢程度。因此，有

**定义** 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小量记作 $f(x)=0(g(x))\quad(x\to x_0)$

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$，则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小量。

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是等

价的无穷小量。

记作　$f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0)$

因此，$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$　　也可记作 $f(x) \sim cg(x)$

$(x \to x_0)$

特别当 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{(x - x_0)^k} = c \neq 0$，即

$f(x) \sim c(x - x_0)^k (x \to 0)$

称 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的 $k$ 阶无穷小量

例 4　$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$，　　$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

例 5
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

所以 $x\to 0$ 时，$\sin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$。

例 6

$$o(x^2)+o(x^3)-o(x^5)=o(x^2)(x\to 0)$$
$$o(x^2).o(x^3)=o(x^5)(x\to 0)$$
$$3o(x^2)=o(x^2)(x\to 0)$$
$$-o(x^2)=o(x^2)(x\to 0)$$

例 7 由 $\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4))-$

$$(1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4))$$

$$(\frac{1}{4!}-\frac{1}{4\cdot 2!})x^4+o(x^4)\sim-\frac{1}{12}x^4 \qquad (x\to 0)$$

例 8 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2))\cdot(x-\frac{x^3}{3!})+o(x^3))-x(1+x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

## 三、无穷大量

与无穷小量相对应的是无穷大量。

**定义：** 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某领域内有定义，任给 $M>0$，存在 $\delta>0$，当 $x\in U^{0}(x_0,\ \delta)$ 时，都有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷大量，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty,\ \text{或}\ f(x)\to\infty\ (x\to x_0)$$

若定义中 $|f(x)|>M$，换成 $f(x)>M$，则称 $f(x)$

件(F) 编辑(E) 视图(V) 插入(I) 格式(O) 工具(T) 表格(A) 窗口(W) 帮助(H)　　键入需要帮助的问题

100%　宋体　小二

是当 $x\to x_0$ 时的正无穷大量，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$。

若定义中 $|f(x)|>M$ 换成 $f(x)<-M$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的负无穷大量，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$。

注意：无穷大量仍属于极限不存在之例，之所以还用极限的记号，是因为无穷大量当 $x\to x_0$ 时具有按绝对值无限增大的趋势，故以符号“$\infty$”作为它的极限，但 $\infty$ 不是一个实数。

我们把这种极限叫做无穷极限，与趋于实数的极限(叫做有穷极限)有着本质的区别之后，我们指极限存在，指的是趋于实数的极限。

自选图形(U)

35 页　1 节　35/40　位置　行　列　录制　修订　扩展　改写　中文(中国)

无穷大量的性质：

(1)有限个无穷大量之积仍是无穷大量；

(2)无穷大量与有界量之和仍是无穷大量。

以上两条性质读者自证。

注意两个无穷大量之和，无限个无穷大量之积不一定是无穷大量，请读者自己举反例。

对于无穷大量，趋于无穷大的速度也有快慢之分。

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$

当 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶

无穷大量，或称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的高阶无穷大量，记作 $f(x)=0(g(x))\ (x\to x_0)$。

当 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$，则称 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷大量。

当 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷大量。

记作　　$f(x)\sim g(x)\quad (x\to x_0)$

尤其是等价这个概念，非常重用，我们可推广到一般的等价量。

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价的，记作 $f(x)\sim g(x)\quad (x\to x_0)$

当 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$，则称 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷大量。

当 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$，则称 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷大量。

记作　$f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0)$

尤其是等价这个概念，非常重用，我们可推广到一般的等价量。

若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$，称当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价的，记作 $f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0)$

例　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，若 $A \neq 0$，则 $f(x) \sim A \quad (x \to x_0)$

定理(等价量替换定理)，若

(1) $f(x)\sim f_1(x)$，$g(x)\sim g_1(x)$，$h(x)\sim h_1(x)$　$(x\to x_0)$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)g_1(x)}{h_1(x)}=A$　(或$\infty$)



则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)g(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)g_1(x)}{h_1(x)}=A$　(或$\infty$)

证：$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)g(x)}{h(x)} =$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)g_1(x)}{h_1(x)} \cdot \frac{f(x)}{f_1(x)} \cdot \frac{g(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{h_1(x)}{h(x)} = A \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$= A$ （或$\infty$）

即 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)g(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)g_1(x)}{h_1(x)} = A$ （或$\infty$）

这个定理告诉我们，在求函数极限时，分子、分母中的因式可用它们的简单的等价量来替换，以便化简计算，但替换以后的函数极限要存在或为无穷大，要注意对分子、分母中加减中的项不能替换，应分解因式。用因式来替换。

例 9. 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x^2}{x \sin x^2 \cdot tg3x}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x\sin x^2\cdot \mathrm{tg}3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^4}{x\cdot x^2\cdot 3x}=\dfrac{1}{6}$

例 10. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}$



$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cdot 1}=\dfrac{1}{2}$

注：这里 sinx，1－cosx， cosx 都是因式，而且 $x\to 0$ 时 sinx～x，1－cosx～$\frac{1}{2}x^2$， cosx～1，但是下面做法是错误的。

解 由 tan x～x， sin x～x $(x\to 0)$

因此，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}0=0$

由无穷小量与无穷大量的定义可以看出，它们的变化状态恰好相反。因此，有

**定理：** 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，且存在 $x_0$ 的某空心领域 $U^0(x_0)$，当 $x\in U^0(x_0)$ 时 $f(x)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty$。

简述为：无穷大的倒数是无穷小；无穷小(当 x 充分接近 $x_0$ 时不等于 0)的倒数为无穷大(请读者自证)。

例 11. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\cos x}$



解 由 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\cos x}=\infty$

解　由$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\cos x}=\infty$

注：或者直接写$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\cos x}=\infty$，

但不能写成$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\cos x}=\dfrac{1}{0}=\infty$。

例　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\infty\quad(n>m)$

其中$P_n(x)$、$Q_m(x)$分别是n次和m次多项式。

极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的定义，也可用领域的概念来叙述：

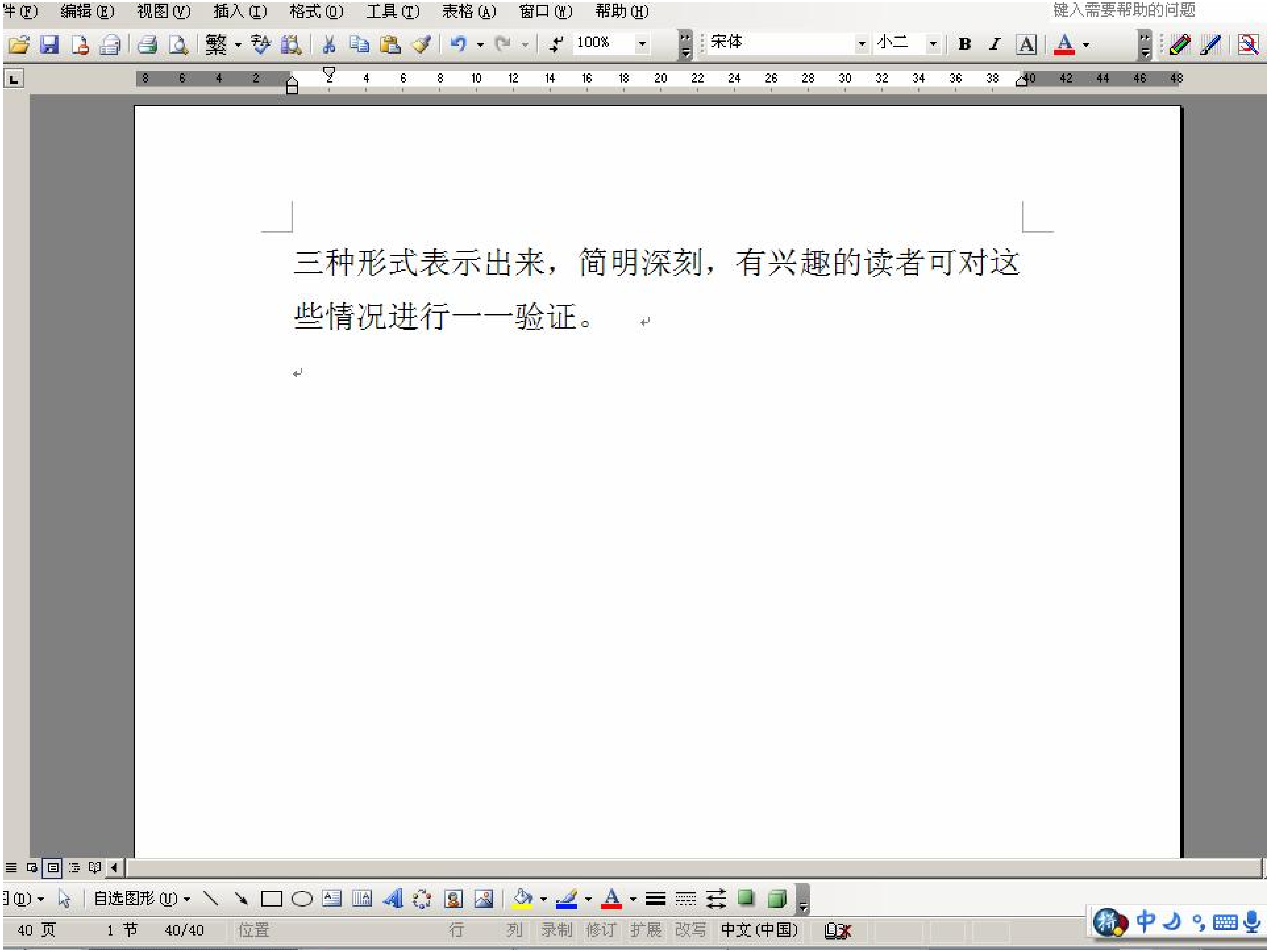
$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$x\in \overset{0}{U}(x_0,\ \delta)$时，都有$f(x)\in U(A,\ \varepsilon)$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in U^0(x_0,\ \delta)$时，都有 $f(x)\in U(A,\ \varepsilon)$

极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in U_+(x_0,\ \delta)$时，都有 $f(x)\in U^0(A,\ \varepsilon)$

极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in U_-(x_0,\ \delta)$时，都有 $f(x)\in U^0(A,\ \varepsilon)$

上面 $x_0$ 也可是 $+\infty$，$-\infty$，$\infty$ 对应的只要把 $\delta>0$(指小)换成 $N>0$(指大)，A 也可是 $+\infty$，$-\infty$，$\infty$，对应的只要把 $\varepsilon>0$(指小)换成 $M>0$(指大)，这样把有穷极限，无穷极限，左极限，右极限共 24 情况，用上面的



三种形式表示出来，简明深刻，有兴趣的读者可对这些情况进行一一验证。